

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẪNG.

Gói lệnh: **> with(geometry);**

0. Một số hàm chung.

01) Hàm đặt tên cho các trục tọa độ.

**Đặt tên cho trục hoành (trục ngang):*

Cú pháp: **> _EnvHorizontalName := 'x':**

✂ Ta có thể đặt tên cho các trục theo ý muốn. Ở lệnh trên ta đã đặt tên cho trục hoành là 'x'.

**Đặt tên cho trục tung (trục dọc):*

Cú pháp: **> _EnvVerticalName := 'y':**

0.2) Hàm xác định tọa độ của một điểm M.

**Nếu các trục tọa độ đã được định nghĩa (đặt tên) thì dùng cú pháp:*

Cú pháp: **> coordinates(M);**

**Nếu các trục tọa độ chưa được định nghĩa (đặt tên) thì dùng cú pháp:*

Cú pháp: **> coordinates(M, [x, y]);**

Trong đó: - x, y là tên của hai trục hoành và tung theo thứ tự đó (Ta có thể đặt tên khác theo ý muốn).

0.3) Hàm tính hoành độ và tung độ của một điểm M.

**Hàm tính hoành độ:*

Cú pháp: **> HorizontalCoord(M);**

**Hàm tính tung độ:*

Cú pháp: **> VerticalCoord(M);**

0.3) Hàm trích(trả lại)tên các điểm mút của một đoạn thẳng, đoạn thẳng định hướng ; các đỉnh một tam giác, một hình vuông.

Cú pháp: **> DefinedAs(obj);**

Trong đó: -obj là tên của các đối tượng nói trên (đoạn thẳng,...).

0.4) Hàm mô tả chi tiết một đối tượng (obj), một tập hợp(điểm), hoặc tập hợp các đối tượng.

Cú pháp: **> detail(obj);**

Kết quả tùy theo đối tượng, sau đây là một số dạng kết quả hay gặp:

- **tên** của đối tượng (name of object);
- **thể loại** (dạng) của đối tượng (form_of_object); point2d , line2d, triangle2d , circle2d,...
- **tọa độ** của điểm (coordinates of point), tập hợp điểm;
- **phương trình** của đối tượng (đường thẳng, đường tròn);

0.5) Thủ tục ‘map’ tác động một hàm (func) lên một tập hợp các đối tượng (objs).

Cú pháp: `> map(func, objs);`

Ví dụ:

-----oOo-----

1. Điểm trong mặt phẳng.

Xác định điểm A có tọa độ $A(a;b)$.

Cú pháp: `> point(A, a, b);` hoặc `> point(A, [a,b]);`.

Ví dụ:

Để xác định điểm $A(1;-3)$ ta làm như sau:

`> with(geometry):`

`> point(A,1,-3);`

A

Để kiểm tra xem đối tượng vừa định nghĩa thuộc thể loại gì ta dùng lệnh:

`> form(A);`

point2d

♣ Kết quả là *point2d* cho ta biết đối tượng vừa định nghĩa là “điểm”.

Để xem tọa độ điểm A ta dùng lệnh:

`> coordinates(A);`

[1, -3]

Có thể trích hoành độ của điểm A bằng lệnh:

`> HorizontalCoord(A);`

1

Có thể trích tung độ của điểm A bằng lệnh:

`> VerticalCoord(A);`

-3

Để xem chi tiết các yếu tố liên quan đến điểm A, ta dùng lệnh:

`> detail(A);`

name of the object: A

form of the object: point2d

coordinates of the point: [1, -3]

☞ Một số hàm liên quan đến điểm.

1.1) Hàm kiểm tra xem 3 điểm A, B, C có thẳng hàng (cùng nằm trên một đường thẳng) hay không.

Cú pháp: **>AreCollinear(A,B,C,'cond');**

Trong đó: - cond: là option cho biết điều kiện để 3 điểm A, B, C thẳng hàng khi tọa độ của A, B, C có tham số.

Kết quả của câu lệnh trên là **true** (nếu 3 điểm thẳng hàng) hoặc **false** (nếu 3 điểm không thẳng hàng).

Khi tọa độ các điểm có chứa tham số thì kết quả thông báo của lệnh là: **FAIL**.

Và option '**cond**' sẽ cho ta biết điều kiện để 3 điểm thẳng hàng.

Ví dụ: Cho ba điểm $A(-3;4), B(0;-5), C(-2;1)$.

Ta nhập ba điểm vào Maple với lệnh:

```
> with(geometry):
point(A,-3,4): point(B,0,-5): point(C,-2,1):
```

Để kiểm tra xem 3 điểm có thẳng hàng không ta dùng lệnh:

```
> AreCollinear(A,B,C);

true
```

Kết quả là true cho biết 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ: Cho 3 điểm $A(1;3), B(2;-2), C(m;5)$.

Nhập ba điểm vào Maple:

```
> with(geometry):
point(A,1,3): point(B,2,-2): point(C,m,5):
```

Kiểm tra xem A, B, C có thẳng hàng không:

```
> AreCollinear(A,B,C,'cond');
AreCollinear: "hint: could not determine if -3+5*m is zero"
FAIL
```

Maple thông báo FAIL cho biết không thể xác định được A, B, C thẳng hàng hay chưa.

Ta dùng lệnh **> cond;** để biết điều kiện để A, B, C thẳng hàng.

```
> cond;

-3 + 5 m = 0
```

Kết quả là:

```
> solve(%,{m});

{ m = 3/5 }
```

1.2) Kiểm tra xem 4 điểm phân biệt A, B, C, D có cùng nằm trên một đường tròn (c) hay không.

Cú pháp: **>AreConcyclic(A,B,C,D, 'cond');**

Trong đó: - cond: là option cho biết điều kiện để 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn khi tọa độ của A, B, C có tham số.

Kết quả của câu lệnh trên là **true** (nếu 4 điểm thuộc cùng một đường tròn) hoặc **false** (nếu 4 điểm không cùng thuộc một đường tròn).

Khi tọa độ các điểm có chứa tham số thì kết quả thông báo của lệnh là: *FAIL*.
Và option '**cond**' sẽ cho ta biết điều kiện để 4 điểm thuộc cùng một đường tròn.

2. Đoạn thẳng trong mặt phẳng.

Để xác định đoạn thẳng có hai điểm mút là A, B ta dùng lệnh:

Cú pháp: **>segment(seg,[A,B]);**
>segment(seg, A,B);

* *Đoạn thẳng có định hướng.*

>dsegment(dseg,[A,B]);
>dsegment(dseg, A,B);

Trong đó: -seg: là tên của đoạn thẳng;
- A, B: là tên của hai điểm mút.

Ứng dụng của đoạn thẳng có định hướng là “xác định hướng” cho vector của phép tịnh tiến. Có thể xem nó là vector của phép tịnh tiến.

* *Trung điểm M của đoạn thẳng AB.*

Cú pháp: **>midpoint(M,A,B);**
hoặc **>midpoint(M,seg);**

Trong đó: - seg là tên của đoạn thẳng đã được xác định trước.

3. Đường thẳng.

a) *Đường thẳng l đi qua 2 điểm A, B cho trước.*

Cú pháp: **>line(l,[A,B]);**

b) *Đường thẳng l xác định bởi một phương trình tổng quát cho trước.*

Cú pháp: **>line(l,eq,name);**

Trong đó: - eq: là phương trình hai biến số;
- name: là tên của 2 biến xác định hai trục ngang(trục hoành_
horizontal axis) và trục dọc(trục tung_vertical axis).

* tên của hai trục được định nghĩa bằng lệnh:

+ trục hoành: **>_EnvHorizontalName := x;**

+ trục tung: **>_EnvVerticalName := y;**

(Ở đây chúng ta đã đặt tên cho trục hoành là x, trục tung là y)

* Nếu ta không đặt tên cho hai trục thì Maple sẽ nhắc chúng ta việc này.

Ví dụ:

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng l đi qua hai điểm $A(1;2), B(2;-3)$.

###

Ta nhập các lệnh như sau:

>with(geometry):
point(A,1,2):point(B,2,-3):
line(l,[A,B]);

l

Để xem phương trình của đường thẳng l ta dùng lệnh:

>Equation(l,[x,y]);

$$-7 + 5x + y = 0$$

Giải thích: Trong lệnh này ta đã khai báo tên 2 trục là x(tên trục hoành) và y(tên trục tung). Do đó phương trình đường thẳng được biểu diễn qua 2 biến x, và y. Nếu ta đặt tên cho 2 trục là [u,v] chẳng hạn thì kết quả sẽ thế nào? Ta cùng xem:

> **Equation(1,[u,v]);**

$$-7 + 5u + v = 0$$

Nếu ta dùng lệnh: > **Equation(1);** thì Maple sẽ yêu cầu ta đặt tên cho hai trục.

♦ Đầu tiên Maple có thông báo yêu cầu ta nhập tên trục hoành:

> **Equation(1);**

enter name of the horizontal axis >

Ta nhập một tên rồi đánh dấu “;” để kết thúc rồi nhấn Enter.

Chẳng hạn nhập: enter name of the horizontal axis > **x;**

♦ Tiếp theo Maple có thông báo yêu cầu ta nhập tên trục tung:

enter name of the vertical axis >

Ta nhập một tên rồi đánh dấu “;” để kết thúc rồi nhấn Enter.

Chẳng hạn nhập: enter name of the horizontal axis > **y;**

Kết quả thu được là:

> **Equation(1);**

enter name of the horizontal axis > **x;**

enter name of the vertical axis > **y;**

$$-7 + 5x + y = 0$$

Nhận xét: Rõ ràng ta nên khai báo đầy đủ tên hai trục trong câu lệnh để Maple khỏi yêu cầu đặt tên.

Nếu ta *đặt tên cho hai trục ngay từ đầu* thì dòng lệnh > **Equation(1);** sẽ cho kết quả đầy đủ.

Ví dụ:

> **with(geometry):**

> **_EnvHorizontalName := x:**

_EnvVerticalName := y:

> **point(A,1,2):point(B,2,-3):line(1,[A,B]):**

> **Equation(1);**

$$-7 + 5x + y = 0$$

Để xem chi tiết các yếu tố liên quan đến đường thẳng l ta dùng lệnh:

> **detail(1);**

name of the object: l

form of the object: line2d

*equation of the line: -7+5*x+y = 0*

♠ Để xem *phương trình tham số* của đường thẳng l đầu tiên ta xác định phương trình tổng quát rồi dùng lệnh > **isolve_**(tìm nghiệm nguyên):

> **Equation(1);**

$$-7 + 5x + y = 0$$

```
> isolve(%,t); # phương trình tham số
      {x=t, y=7-5t}
```

Một số hàm liên quan đến đường thẳng.

3.1) Hàm kiểm tra xem 2 đường thẳng $l1$ và $l2$ có song song với nhau không.

Cú pháp: **>AreParallel(l1,l2, 'cond');**

Trong đó: - $l1, l2$: là tên của 2 đường thẳng;
 - **cond**: là option khai báo cho biết điều kiện để $l1//l2$ khi phương trình tổng quát của $l1$ hoặc $l2$ có chứa tham số.

Ví dụ: Cho hai đường thẳng ($l1$): $3x - 4y + 5 = 0$; ($l2$): $7x + my - 7m + 1 = 0$.

Nhập 2 đường thẳng vào Maple:

```
> with(geometry):
> line(l1,3*x-4*y+5=0,[x,y]):
line(l2,7*x+m*y-7*m+1=0,[x,y]):
```

Để kiểm tra xem $l1, l2$ có song song hay không, ta dùng lệnh:

```
> AreParallel(l1,l2,'cond');
AreParallel: "hint: cannot determine if 3*m+28 is zero"
FAIL
```

Maple thông báo **FAIL** cho ta biết chưa xác định được $l1, l2$ có song song với nhau hay không. Để tìm điều kiện của tham số m để $l1//l2$, ta dùng lệnh:

```
> cond;
      3 m + 28 = 0

> solve(%,{m});
      { m = -28
        3 }
```

3.2) Hàm kiểm tra xem 2 đường thẳng $l1$ và $l2$ có vuông góc với nhau không.

Cú pháp: **>ArePerpendicular(l1,l2, 'cond');**

Trong đó: - $l1, l2$: là tên của 2 đường thẳng;
 - **cond**: là option khai báo cho biết điều kiện để $l1 \perp l2$ khi phương trình tổng quát của $l1$ hoặc $l2$ có chứa tham số.

Ví dụ: Cho điểm $A(1;3)$ và đường thẳng (l): $3x + 7y - 13 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (l).

Nhập điểm A và đường thẳng (l):

```
> with(geometry):
> point(A,1,3): line(l,3*x+7*y-13=0,[x,y]):
```

Nhập đường thẳng (d) qua A với PTTQ: $a(x-1) + b(y-3) = 0$.

```
> line(d,a*(x-1)+b*(y-3)=0,[x,y]):
checkline: "One of the following conditions must be satisfied " a
<> 0 b <> 0
```

Erro

Maple yêu cầu chúng ta phải khai báo $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

Vậy ta phải khai báo thêm dùng lệnh như sau:

```
> assume(a<>0,b<>0);
```

```
line(d,a*(x-1)+b*(y-3)=0,[x,y]):
```

Bây giờ ta tìm điều kiện để $(d) \perp (l)$:

```
> ArePerpendicular(l,d,'cond');
```

```
ArePerpendicular: "hint: cannot determine if 3*a+7*b is zero"
FAIL
```

Điều kiện cần tìm là:

```
> cond;
```

$$3a + 7b = 0$$

Bây giờ ta tìm một số lệnh khác để viết phương trình của (d):

```
> dk:=solve(%,{a}): # tính a theo b
```

```
> f:=a*(x-1)+b*(y-3):subs(dk,f): # tính f với a,b thỏa hệ thức trên
```

```
> primpart(%,x):%0; # làm gọn hệ số của f và lập phương trình f=0.
-7x-2+3y=0
```

Nhận xét: Rõ ràng đến kết quả $3a + 7b = 0$ có thể chọn $a = 7, b = -3$ ta được phương trình của (d): $7x - 3y + 2 = 0$. Nhưng tôi vẫn muốn dùng các tính năng của Maple để giải quyết điều đó. Việc này có thể giúp ta lập một chương trình cho bài toán tổng quát.

Trên đây là một ví dụ minh họa cho “hàm kiểm tra quan hệ vuông góc của 2 đường thẳng” chứ đối với bài toán này ta không giải theo phương pháp trên.

3.3) Hàm kiểm tra xem đường thẳng l có tiếp xúc với đường tròn c không.

Cú pháp: **>AreTangent(l,c);**

Trong đó: - l; c: là tên của đường thẳng và đường tròn;

Ví dụ: Cho đường tròn có phương trình $(c): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$ và 2 đường thẳng có phương trình $(d1): x - 2y + 8 = 0$, $(d2): 3x - 2y - 6 = 0$.

Nhập phương trình các đường trên vào Maple:

(Xem phần nhập đường tròn ở mục 4_đường tròn)

+Nhập 2 đường thẳng:

```
> restart;
```

```
with(geometry):
```

```
> line(d1,x-2*y+8=0,[x,y]):line(d2,3*x-2*y-6=0,[x,y]):
```

+Nhập đường tròn (c):

```
> circle(c,(x-3)^2+(y-3)^2=5,[x,y]):
```

Để kiểm tra xem (d1) có tiếp xúc với (c) hay không ta dùng lệnh:

```
> AreTangent(d1,c);
```

```
true
```

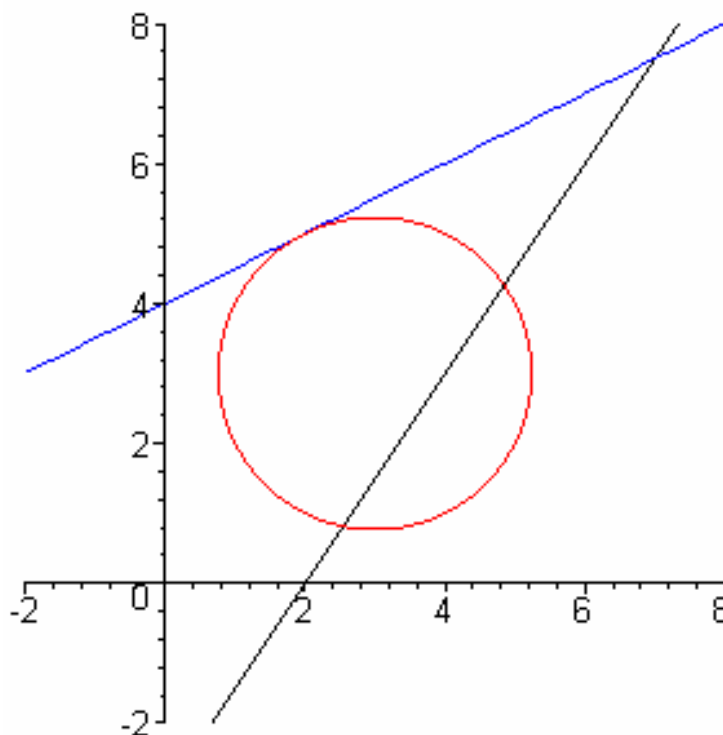
Kết quả là **true** cho biết (d1) tiếp xúc với (c).
 Để kiểm tra xem (d2) có tiếp xúc với (c) hay không ta dùng lệnh:
`> AreTangent(d2,c);`

false

Kết quả là **false** cho biết (d2) không tiếp xúc với (c).
 Có thể dùng đồ thị để minh họa khẳng định trên:

Để vẽ các đường trên ta dùng lệnh `> draw();` như sau:

`> draw([d1(color=blue),d2(color=black),c],view=[-2..8,-2..8]);`



Cách khác: (dùng gói lệnh `> with(plottools): with(plots):`)

Trước khi vẽ (d1) và (d2) ta lấy 2 điểm ngẫu nhiên trên (d1) và trên (d2) rồi vẽ đường thẳng đi qua 2 điểm đó. (Đây là cú pháp của Maple).

Dùng lệnh `> randpoint();` để lấy 2 điểm A, B ngẫu nhiên trên (d1) và 2 điểm C, E ngẫu nhiên trên (d2).

`> randpoint(A,d1,-1..0):randpoint(B,d1,0..1):`

`> randpoint(C,d2,-1..0):randpoint(E,d2,0..1):`

Trước khi vẽ đường tròn (c) cần xác định tâm và bán kính:

`> circle(c,(x-3)^2+(y-3)^2=5,[x,y]):`

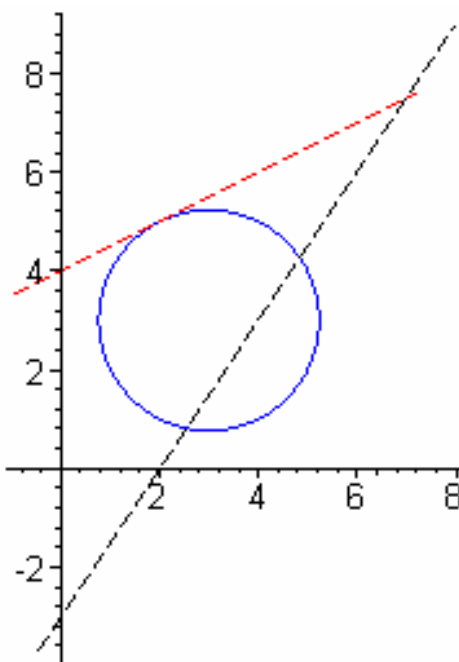
`> q:=center(c);r:=radius(c);`

q := center_c

$$r := \sqrt{5}$$

Bây giờ ta dùng gói lệnh (xem chương vẽ đồ thị) để vẽ các đường trên:

```
> with(plottools):
with(plots):
> d_1:=line(coordinates(A,[x,y]),coordinates(B,[x,y]),
color=red, linestyle=dash):
> d_2:=line(coordinates(C,[x,y]),coordinates(E,[x,y]),
color=black, linestyle=dash):
> c1 := circle(coordinates(q,[x,y]),r, color=blue):
> display(d_1,d_2,c1);
```



Nhận xét: Cách dùng gói lệnh with(plots) khá dài dòng phức tạp, theo tôi để vẽ các đường trong hình học ta nên dùng lệnh 'draw'.

3.4) Hàm kiểm tra xem 3 đường thẳng l_1, l_2, l_3 có đồng quy hay không.

Cú pháp: **>AreConcurrent(l1,l2,l3, 'cond');**

Trong đó: - $l_1; l_2; l_3$: là tên của 2 đường thẳng;
- cond: là option khai báo cho biết điều kiện để l_1, l_2, l_3 đồng quy khi phương trình tổng quát của l_1, l_2 hoặc l_3 có chứa tham số.

3.5) Hàm xác định đường thẳng (d) đi qua điểm A cho trước và song song với đường thẳng (l) cho trước.

Cú pháp: **>ParallelLine(d, A, l);**

Trong đó: - d là tên đường thẳng dựng được;
- A, l: là tên của điểm và đường thẳng cho trước.

3.6) Hàm xác định đường thẳng (d) đi qua điểm A cho trước và vuông góc với đường thẳng (l) cho trước.

Cú pháp: **>PerpendicularLine(d, A, l);**
 Trong đó: - d là tên đường thẳng dựng được;
 - A, l: là tên của điểm và đường thẳng cho trước.

Ví dụ:

Quay lại ví dụ ở mục 3.2), ta có thể viết nhanh đường thẳng (d) đi qua điểm A(1;3) và vuông góc với đường thẳng (l): $3x + 7y - 13 = 0$ như sau:

Nhập điểm A và đường thẳng (l):

```
> with(geometry):
> point(A,1,3): line(l,3*x+7*y-13=0,[x,y]):
Để xác định đường thẳng (d) qua A và (d)⊥(l), ta dùng lệnh:
> PerpendicularLine(d,A,l):
Để xem phương trình của (d) ta dùng lệnh:
> Equation(d,[x,y]);
```

$$2 + 7x - 3y = 0$$

Hoặc muốn xem chi tiết về (d) ta dùng lệnh:

```
> detail(d);
name of the object: d
form of the object: line2d
equation of the line: 2+7*x-3*y = 0
```

3.7) Hàm xác định đường trung trực (d) của đoạn thẳng AB.

Cú pháp: **>ParallelLine(d, A, B);**
 Trong đó: - d là tên đường thẳng dựng được;
 - A,B: là tên của 2 điểm mút.

3.8) Hàm xác định hệ số góc của đường thẳng (l) cho trước.

Cú pháp: **>slop(l);**

* Xác định hệ số góc của đường thẳng đi qua 2 điểm A, B ta có cú pháp:

>slop(A, B);

3.9) Hàm xác định giao điểm M của 2 đường thẳng (l1) và (l2).

Cú pháp: **>intersection(M, l1, l2);**

3.10) Hàm kiểm tra xem điểm M có nằm trên đường thẳng (l) không.

Cú pháp: **>IsOnLine(M, l, 'cond');**
 Trong đó: - M, l là tên của điểm và đường thẳng cho trước;
 - cond: là option khai báo cho biết điều kiện để $M \in (l)$.

4. Tam giác.

a) Tam giác T có 3 đỉnh A, B, C cho trước.

Cú pháp: `> triangle(T, [A, B, C], name);`

Trong đó: - T là tên của tam giác;
- name: là tên của 2 trục tọa độ (đặt trong cặp ngoặc [..]).

b) Tam giác T có 3 đỉnh là giao điểm của 3 đường thẳng $l1, l2, l3$ cho trước.

Cú pháp: `> triangle(T, [l1, l2, l3], name);`

c) Tam giác T có 3 độ dài 3 cạnh a, b, c cho trước.

Cú pháp: `> triangle(T, [a, b, c]);`

d) Tam giác T xác định bởi 2 cạnh a, b cho trước và góc α ở giữa 2 cạnh đó.

Cú pháp: `> triangle(T, [a, 'angle' = α , b], name);`

Nhận xét: Theo 2 lệnh c) và d) thì tam giác dựng được là tùy ý.

• Một số hàm liên quan đến tam giác.

4.1) Hàm “tính diện tích” của tam giác T :

Cú pháp: `> area(T);`

Ví dụ: Cho ba điểm $A(1;2), B(-1;1), C(2;3)$.

Để xác định tam giác ABC ta dùng lệnh:

`> with(geometry):
triangle(ABC, [point(A,1,2), point(B,-1,1), point(C,2,3)]):`

Để tính diện tích tam giác ABC ta dùng lệnh:

`> area(ABC);`

$$\frac{1}{2}$$

4.2) Hàm kiểm tra xem 2 tam giác $T1, T2$ có đồng dạng hay không?

Cú pháp: `> AreSimilar(T1, T2, 'cond');`

Trong đó: - $T1; T2$: là tên của 2 tam giác;
- cond: là option khai báo cho biết điều kiện để $T1$ và $T2$ các yếu tố trong tam giác có chứa tham số.

4.3) Hàm xác định đường cao AH của tam giác ABC H là hình chiếu của A trên cạnh BC).

Đặt tên đường cao là hA . Khi đó:

Cú pháp: `> altitude(hA, A, ABC, H);`

Trong đó: - ABC là tên của tam giác;
- A là đỉnh; hA là tên đường cao; H là chân đường cao.

Chú ý: Nếu có khai báo H thì hA chính bằng đoạn AH , nếu không thì hA là đường thẳng qua A và vuông góc với BC .

4.4) Hàm xác định đường phân giác trong AD của tam giác ABC D là chân đường phân giác trong của góc \widehat{BAC} và thuộc đoạn BC .

Cú pháp: `> bisector(pA, A, ABC, D);`

Trong đó: - ABC là tên của tam giác;
- A là đỉnh; pA là tên đường phân giác; D là chân đường phân giác.

4.5) Hàm xác định đường phân giác ngoài AE của tam giác ABC_E là chân đường phân giác ngoài của góc \widehat{BAx} và ở ngoài đoạn BC.

Cú pháp: **>ExternalBisector(bA, A, ABC, E);**

Trong đó: - ABC là tên của tam giác;
- A là đỉnh; bA là tên đường phân giác; E là chân đường phân giác.

4.6) Hàm xác định đường trung tuyến AM của tam giác ABC_M là trung điểm của cạnh BC.

Cú pháp: **>median(mA, A, ABC, M);**

Trong đó: - ABC là tên của tam giác; A là đỉnh;
- mA là tên đường trung tuyến.

4.7) Hàm kiểm tra xem tam giác ABC có phải là tam giác đều hay không?

Cú pháp: **>IsEquilateral(ABC, 'cond');**

Trong đó: - ABC là tên của tam giác;
- cond: là option khai báo điều kiện để tam giác ABC đều.

Ví dụ:

4.8) Hàm kiểm tra xem tam giác ABC có phải là tam giác vuông hay không?

Cú pháp: **>IsRightTriangle(ABC, 'cond');**

Trong đó: - ABC là tên của tam giác;
- cond: là option khai báo điều kiện để tam giác ABC vuông.

4.9) Hàm xác định trong tâm G của tam giác T.

Cú pháp: **>centroid(G, T);**

4.10) Hàm xác định trục tâm H của tam giác T.

Cú pháp: **>orthocenter(H, T);**

4.11) Hàm xác định đường tròn (o) ngoại tiếp tam giác T.

Cú pháp: **>circumcircle(o, T, 'centername'=cn);**

Trong đó: - o là tên đường tròn dựng được;
- T là tên tam giác;
- centername'=cn: khai báo và đặt tên tâm đường tròn là cn.

4.12) Hàm xác định đường tròn (c) nội tiếp tam giác T.

Cú pháp: **>incircle(c, T, 'centername'=cn);**

Trong đó: - c là tên đường tròn dựng được;
- T là tên tam giác;
- centername'=cn: khai báo và đặt tên tâm đường tròn là cn.

4.12) Hàm tính độ dài các cạnh của tam giác T.

Cú pháp: **>sides(T);**

Kết quả Maple cho là một tập hợp (list) gồm độ dài 3 cạnh của tam giác.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có tọa độ 3 đỉnh: $A(4;1), B(2;-2), C(-3;2)$.

Nhập các điểm trên vào Maple:

```
> with(geometry):
point(A,4,1), point(B,2,-2), point(C,-3,2):
Xác định (định nghĩa) tam giác ABC:
> triangle(ABC, [A,B,C]);
```

ABC

Tính độ dài các cạnh của tam giác:

```
> sides(ABC);
```

$[\sqrt{13}, \sqrt{41}, \sqrt{50}]$

Suy ra chu vi của tam giác.

(Để tính chu vi tam giác, ta dùng hàm 'add' để cộng ba cạnh trên)

```
> add(i,i=);
```

$\sqrt{13} + \sqrt{41} + \sqrt{50}$

Hay > **simplify(%)**;

$\sqrt{13} + \sqrt{41} + 5\sqrt{2}$

Lấy gần đúng: > **evalf(%,5)**;

17.080

4.13) Hàm xác định các đường tròn bàng tiếp tam giác T.

Cú pháp: **> incircle(obj, T, [c1(o1), c2(o2), c3(o3)]);**

Trong đó:

- obj: là danh sách ba đường tròn dựng được;
- T là tên tam giác;
- Nếu option **[c1(o1), c2(o2), c3(o3)]** được khai báo, thì Maple cho ta biết tên của 3 đường tròn là c1, c2, c3 và tên các tâm tương ứng của 3 đường tròn đó là o1, o2, o3.

Ví dụ: Cho ba điểm $A(1;1), B(-1;2), C(0;-2)$.

- a) Chứng minh 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.
- b) Xác định tọa độ tâm và viết phương trình các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và đường tròn bàng tiếp các góc của tam giác ABC.
- c) Viết phương trình các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác trong của ΔABC .
- d) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H của ΔABC . Tìm tọa độ chân các đường cao của ΔABC .

Gợi ý làm bài toán trên.

Đầu tiên nhập các điểm trên vào Maple:

```
> with(geometry):
point(A,1,1), point(B,-1,2), point(C,0,-2):
a) Để chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng ta dùng lệnh:
> AreCollinear(A,B,C);
```

false

Kết quả là false cho ta điều phải chứng minh.

b) Để xác định các đường tròn, đầu tiên ta xác định tam giác ABC và đặt tên tam giác là T (cho gọn):

> **triangle(T,[A,B,C],[x,y]):**

* Xác định đường tròn (c) ngoại tiếp tam giác T:

> **circumcircle(c,T,'centername'=cn):**

+ phương trình của đường tròn (c):

> **eq:=Equation(c,[x,y]):eq;**

$$-\frac{26}{7} + x^2 + y^2 + \frac{11}{7}x + \frac{1}{7}y = 0$$

> **with(student):**

completesquare(lhs(eq),[x,y]):%=0;

$$\left(y + \frac{1}{14}\right)^2 - \frac{425}{98} + \left(x + \frac{11}{14}\right)^2 = 0$$

+ Tâm của đường tròn có tọa độ:

> **coordinates(cn);**

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

+ Bán kính đường tròn (c) bằng:

> **radius(c);**

$$\frac{\sqrt{425} \sqrt{98}}{98}$$

* Xác định đường tròn (c_) nội tiếp tam giác T:

> **incircle(c_,T,'centername'=cn):**

+ Phương trình của đường tròn (c_):

> **a:=Equation(c_,[x,y]):a;**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{2(\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17})x}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{2(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})y}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17})^2}{(\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2})^2} \\ + \frac{(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})^2}{(\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2})^2} \\ - \frac{\left(3 + \frac{\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{2(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}}\right)^2}{5} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + \frac{2(\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17})x}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{2(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})y}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17})^2}{(\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2})^2} \\
& + \frac{(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})^2}{(\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2})^2} \\
& - \frac{\left(3 + \frac{\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{2(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}}\right)^2}{5} = 0
\end{aligned}$$

Nhận xét, đây là một phương trình quá “cồng kềnh”, nhưng phải công nhận là một kết quả đẹp. Ta cần viết gọn lại dưới dạng thập phân như sau:

> **evalf(%)**;
 $x^2 + y^2 - 0.2018238482x - 1.255171050y - 0.1364458298 = 0.$

+ Tọa độ tâm của (c₁):

> **coordinates(c₁)**;
 $\left[-\frac{\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17}}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} \right]$

Tính ra thập phân (với 4 chữ số thập phân):

> **evalf(%,4)**;
 $[0.1009, 0.6276]$

+ Bán kính đường tròn (c₁):

> **radius(c₁)**;
 $\frac{\left(3 + \frac{\sqrt{5}\sqrt{2} - \sqrt{17}}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}} - \frac{2(2\sqrt{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{17})}{\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{2}}\right)^2}{5} \sqrt{5}$

Tính ra thập phân với 4 chữ số thập phân:

> **evalf(%,4)**;
 0.7352

*Xác định các đường tròn bàng tiếp (có 3 đường tròn):

Đặt tên các đường tròn đó lần lượt là c1, c2, c3 có tâm theo thứ tự là o1, o2, o3.

Ta dùng lệnh:

> **excircle(obj,T,[c1(o1),c2(o2),c3(o3)])**:

+ Phương trình đường tròn (c1):

> **Equation(c1,[x,y])**:

> **evalf(%)**;

$$x^2 + y^2 + 11.42590136x + 3.561190430y + 5.67741678 = 0.$$

+ Tâm đường tròn (c1):

> **coordinates(o1)**;

$$\left[-\frac{6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17} + 17\sqrt{5} + 6\sqrt{17}}{-11\sqrt{5} - \sqrt{17} + 6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17}}, \frac{10\sqrt{2}\sqrt{17} - 16\sqrt{17} + 12\sqrt{5}\sqrt{2} - 29\sqrt{5}}{-11\sqrt{5} - \sqrt{17} + 6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17}} \right]$$

Lấy kết quả dạng thập phân:

> **evalf(%,4);**

[-5.716, -1.782]

+ Bán kính đường tròn (c1):

> **radius(c1);**

$$\left(-2 + \frac{4(6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17} + 17\sqrt{5} + 6\sqrt{17})}{-11\sqrt{5} - \sqrt{17} + 6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17}} - \frac{10\sqrt{2}\sqrt{17} - 16\sqrt{17} + 12\sqrt{5}\sqrt{2} - 29\sqrt{5}}{-11\sqrt{5} - \sqrt{17} + 6\sqrt{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{17}} \right) \sqrt{17/17}$$

Viết ở dạng thập phân:

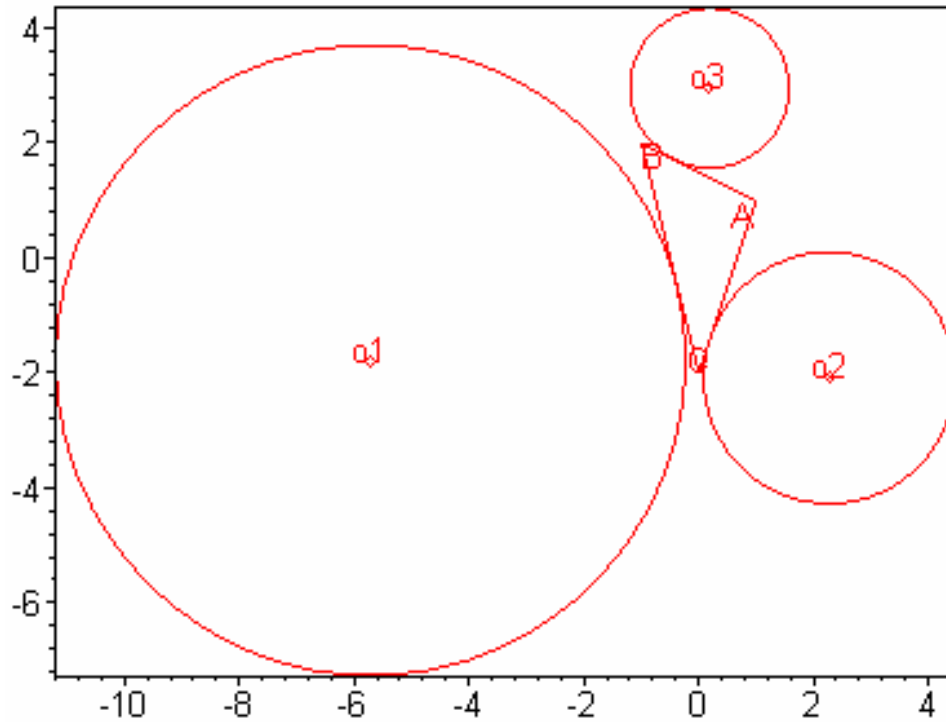
> **evalf(%,5);**

5.4893

Các đường tròn còn lại quý bạn đọc có thể dùng các lệnh tương tự trên để tìm các yếu tố của chúng.

♣ Chú ý: Maple có thể vẽ 3 đường tròn trên trong cùng một hệ trục tọa độ bằng lệnh sau:

> **draw({op(obj),T},printtext=true);**



c)

* *Viết phương trình các đường cao.*

+ Đường cao AH là đường thẳng qua A và vuông góc với BC:

> **altitude(hA,A,T);** hA

Phương trình của đường cao AH:

> **Equation(hA,[x,y]);**

$$3 + x - 4y = 0$$

Độ dài đường cao = khoảng cách từ A đến cạnh BC:

> **distance(A,line(BC,[B,C]));**

$$\frac{7\sqrt{17}}{17}$$

• Để tìm tọa độ của H, ta nhập đường cao bằng lệnh:

> **altitude(hA,A,T,H);**

Sau đó xem tọa độ của H bằng lệnh:

> **coordinates(H);**

$$\left[\frac{-11}{17}, \frac{10}{17} \right]$$

Khi đó, độ dài đường cao AH được tính bằng lệnh:

> **distance(A,H);**

$$\frac{\sqrt{49} \sqrt{17}}{17}$$

Hay: > **simplify(%);**

$$\frac{7 \sqrt{17}}{17}$$

Tương tự như thế, quý bạn đọc có thể viết tiếp các đường cao còn lại.

Nhân xét: Có thể viết đường cao AH bằng cách xem nó là đường thẳng qua A và vuông góc với BC và dùng lệnh >PerpendicularLine(d,A,BC);

Đầu tiên nhập điểm A và xác định đường thẳng BC:

> **point(A,1,1),line(BC,[B,C]):**

Tiếp theo là xác định đường thẳng (d) qua A và vuông góc với BC:

> **PerpendicularLine(d,A,BC):**

Xem phương trình của (d):

> **Equation(d,[x,y]);**

$$3 + x - 4y = 0$$

Lúc đó tọa độ của H là giao điểm của (d) và đường thẳng BC:

> **intersection(H,d,BC):**

Tọa độ của H là:

> **coordinates(H);**

$$\left[\frac{-11}{17}, \frac{10}{17} \right]$$

* *Đường trung tuyến:*

+Xác định đường trung tuyến AM:

> **median(mA,A,T):**

Xem phương trình của trung tuyến AM:

> **Equation(mA);**

$$\frac{1}{2} + x - \frac{3y}{2} = 0$$

Làm gọn bằng lệnh sau: > **primpart(lhs(%),x):%=0;**

$$1 + 2x - 3y = 0$$

Độ dài trung tuyến AM:

(Bằng đoạn AM, với M là trung điểm của BC)

$$> \text{distance}(A, \text{midpoint}(M, B, C));$$

$$\frac{\sqrt{13} \sqrt{4}}{4}$$

Rút gọn giá trị trên ta được:

$$> \text{simplify}(\%);$$

$$\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Các đường trung tuyến còn lại quý bạn đọc tự làm rõ theo các bước trên.

* *Đường phân giác trong:*

+ Để xác định đường phân giác trong của góc A, ta dùng lệnh:

$$> \text{bisector}(pA, A, T); \quad (1)$$

Chú ý: Nếu muốn xác định chân D của đường phân giác ta dùng lệnh:

$$> \text{bisector}(pA, A, T, D); \quad (2)$$

Phương trình của đường phân giác AD:

$$> \text{Equation}(pA);$$

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{10})x + (-2\sqrt{10} - \sqrt{5})y + 3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} = 0$$

Nếu đã dùng lệnh (2), ta có thể xác định tọa độ của D:

$$> \text{coordinates}(D);$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}} \right]$$

(Nhưng lệnh (2) không giúp ta xác định được phương trình của AD).

Độ dài đoạn AD:

$$> \text{distance}(A, D);$$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}}\right)^2}$$

Rút gọn kết quả trên ta được:

$$> \text{simplify}(\%);$$

$$\frac{\sqrt{20 - 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$$

Các đường phân giác trong của các góc còn lại xin mời quý bạn đọc tự làm.

* *Đường phân giác ngoài:*

+ Để xác định đường phân giác ngoài góc A ta dùng lệnh:

$$> \text{ExternalBisector}(p_A, A, T); \quad (1)$$

(trong lệnh này p_A là tên của đường phân giác)

Phương trình của đường phân giác:

$$> \text{Equation}(p_A);$$

$$(-2\sqrt{10} - \sqrt{5})x + (-3\sqrt{5} + \sqrt{10})y + 4\sqrt{5} + \sqrt{10} = 0$$

Để xác định điểm E _ là giao điểm của BC và p_A, ta dùng lệnh:

> **intersection(E,p_A,BC):**

Tọa độ của E là:

> **coordinates(E);**

$$\left[-\frac{-10+\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-11}, -\frac{2(9+4\sqrt{2})}{6\sqrt{2}-11} \right]$$

Độ dài đoạn AE bằng:

> **distance(A,E);**

$$\sqrt{\left(1+\frac{-10+\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-11}\right)^2 + \left(1+\frac{2(9+4\sqrt{2})}{6\sqrt{2}-11}\right)^2}$$

Rút gọn được:

> **simplify(%);**

$$-\frac{7\sqrt{20-2\sqrt{2}}}{6\sqrt{2}-11}$$

Chú ý: Riêng đường phân giác ngoài không thể khai báo thêm chân đường phân giác, nghĩa là lệnh >**ExternalBisector(p_A,A,T, E):** không thể thực hiện.

d) Trọng tâm G của tam giác T được xác định bằng lệnh:

> **centroid(G,T):**

Tọa độ của G:

> **coordinates(G);**

$$\left[0, \frac{1}{3} \right]$$

* Trục tâm H tam giác T được xác định bằng lệnh:

> **orthocenter(H,T):**

Tọa độ của H:

> **coordinates(H);**

$$\left[\frac{-11}{17}, \frac{10}{17} \right]$$

Nhận xét: Với các hàm của Maple thì một đối tượng (điểm, đường thẳng,...) có thể được xác định theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn việc xác định trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có thể dùng trực tiếp các hàm có chức năng đó hoặc cũng có thể xác định bằng các hàm khác (trục tâm tam giác là giao điểm của 2 đường cao, tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của 2 đường trung trực).

5. Đường tròn.

a) *Đường tròn c đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.*

Cú pháp: >**circle(c,[A,B,C],[name],'centername'=m);**

Trong đó: - c: là tên đường tròn;

- [name]: là tên 2 trục tọa độ;
- `centername`=m: khai báo tên của tâm đường tròn.

Ví dụ: Cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(2;3)$.

Nhập 3 điểm A, B, C vào Maple:

```
> with(geometry):
point(A,1,2): point(B,-1,1): point(C,2,3):
```

Xác định đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C bằng lệnh:

```
> circle(c,[A,B,C],[x,y], 'centername'=m);
```

c

Xác định tọa độ tâm m của đường tròn c :

```
> coordinates(m);
```

$$\left[\frac{-5}{2}, \frac{13}{2} \right]$$

Xác định độ dài bán kính của đường tròn c :

```
> radius(c);
```

$$\frac{\sqrt{65} \sqrt{2}}{2}$$

Xem phương trình của đường tròn c :

```
> Equation(c);
```

$$16 + x^2 + y^2 + 5x - 13y = 0$$

Viết phương trình trên về dạng chính tắc bằng gói lệnh:

```
> with(student):
completesquare(lhs(E),[x,y]):
%=0;
```

$$\left(y - \frac{13}{2} \right)^2 - \frac{65}{2} + \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 = 0$$

Chú ý: Nếu trong câu lệnh nhập đường tròn ta không khai báo option

'centername'=m thì ta có thể gọi tâm đường tròn ra bằng lệnh: `>center(c);`.

Chẳng hạn với ba điểm A, B, C ở trên ta có thể nhập đường tròn bằng lệnh:

```
> circle(c,[A,B,C],[x,y]);
```

c

Khi đó ta phải gọi tâm đường tròn bằng lệnh:

```
> M:=center(c);
```

$$M := center_c$$

Rồi tìm tọa độ của M:

```
> coordinates(M);
```

$$\left[\frac{-5}{2}, \frac{13}{2} \right]$$

b) Đường tròn c có đường kính AB .

Cú pháp: **>circle(c,[A,B],[name],'centername'=m);**

Trong đó: - c : là tên đường tròn;
 - $[name]$: là tên 2 trục tọa độ;
 - 'centername' = m : khai báo tên của tâm đường tròn.

Ví dụ: Cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$.

Nhập hai điểm vào Maple:

> with(geometry):
point(A,1,2): point(B,-1,1):

Xác định đường tròn đường kính AB :

> circle(c,[A,B],[x,y],'centername'=m);
 c

Tọa độ tâm, bán kính và phương trình đường tròn được thực hiện bởi các lệnh với kết quả như sau:

> coordinates(m);

$$\left[0, \frac{3}{2}\right]$$

> radius(c);

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

> E:=Equation(c);

$$E := 1 + x^2 + y^2 - 3y = 0$$

> with(student):completesquare(lhs(E),[x,y]):%=0;

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + x^2 = 0$$

c) Đường tròn c xác định bởi tâm A và bán kính r .

Cú pháp: **>circle(c,[A,r],[name],'centername'=m);**

Trong đó: - c : là tên đường tròn;
 - $[name]$: là tên 2 trục tọa độ;
 - 'centername' = m : khai báo tên của tâm đường tròn.

d) Đường tròn c xác định bởi một phương trình equ .

Cú pháp: **>circle(c, equ,[name],'centername'=m);**

Trong đó: - c : là tên đường tròn;
 - $[name]$: là tên 2 trục tọa độ;
 - 'centername' = m : khai báo tên của tâm đường tròn.

*** Một số hàm liên quan đến đường tròn.**

5.1) Hàm tính phương tích của một điểm M đối với một đường tròn c .

Cú pháp: **>powerpc(M, c);**

5.2) Hàm xác định trục đẳng phương (d) của hai đường tròn $c1, c2$.

Cú pháp: **>RadicalAxis(d, c1, c2);**

5.3) Hàm xác định tâm đẳng phương U của 3 đường tròn $c1, c2, c3$.

Cú pháp: **>RadicalCenter(U, c1, c2, c3);**

5.4) Hàm kiểm tra xem điểm M có nằm trên đường tròn (c) hay không.

Cú pháp: **>IsOnCircle(M, c, 'cond');**

Trong đó: -

*Cũng có thể kiểm tra xem một tập hợp [list] các điểm có nằm trên đường tròn c .

Cú pháp: **>IsOnCircle([list], c, 'cond');**

5.5) Hàm xác định tâm vị tự (trong và ngoài) của hai đường tròn $c1, c2$.

Cú pháp: **>similitude(obj, c1, c2);**

Trong đó: - obj là option gán cho 2 tâm vị tự trong và ngoài.

Muốn xem tọa độ các tâm vị tự ta có thể dùng lệnh:

>map(coordinates, obj);

Hoặc cũng có thể dùng lệnh sau để xác định tâm vị tự M, N của 2 đường tròn không đồng tâm $c1, c2$.

>similitude(obj, c1, c2, [M, N]);

Ví dụ: Cho ba đường tròn có phương trình : $(c1): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$

$(c2): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, (c3): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

Nhập 3 đường tròn vào Maple:

> with(geometry):

> circle(c1, (x+2)^2+(y-2)^2=2, [x,y], 'centername'=cn1):

> circle(c2, (x-1)^2+(y-2)^2=4, [x,y], 'centername'=cn2):

> circle(c3, (x-2)^2+(y-2)^2=1, [x,y], 'centername'=cn3):

Để xác định các tâm vị tự của $c1$ và $c3$ ta dùng lệnh:

> similitude(obj1, c1, c3):

Để xem chi tiết obj1, ta dùng lệnh:

> detail(obj1);

[name of the object: in_similitude_of_c1_c3

form of the object: point2d

coordinates of the point: $\left[\frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right]$, name of the object: ex_similitude_of_c1_c3

form of the object: point2d

coordinates of the point: $\left[\frac{-2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right]$

Nhìn vào kết quả trên maple cho ta biết:

Tọa độ của tâm vị tự trong (*in_similitude_of_c1_c3*) là: $\left[\frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right]$

Tọa độ của tâm vị tự ngoài (*ex_similitude_of_c1_c3*) là: $\left[\frac{-2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right]$

♣ Nếu không muốn xem chi tiết ta có thể gọi tọa độ của tâm vị tự trong theo lệnh:

```
> coordinates(in_similitude_of_c1_c3);
```

$$\left[\frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right]$$

Làm gọn lại:

```
> rationalize(%);expand(%);
```

$$\begin{aligned} & [2(-1+\sqrt{2})^2, 2] \\ & [6-4\sqrt{2}, 2] \end{aligned}$$

Lấy gần đúng với 5 chữ số:

```
> evalf(%,5);
```

$$[0.34315, 2.]$$

Và gọi tọa độ tâm vị tự ngoài theo lệnh:

```
> coordinates(ex_similitude_of_c1_c3);
```

$$\left[\frac{-2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right]$$

```
> rationalize(%);expand(%);
```

$$\begin{aligned} & [2(\sqrt{2}+1)^2, 2] \\ & [6+4\sqrt{2}, 2] \end{aligned}$$

Lấy gần đúng:

```
> evalf(%,5);
```

$$[11.657, 2.]$$

♣ Chú ý: Chúng ta cũng có thể xem tọa độ 2 tâm vị tự một lúc bằng lệnh sau:

> **map(coordinates,obj1);**

$$\left[\left[\frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right], \left[\frac{-2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right] \right]$$

> **rationalize(%);expand(%);**

$$\begin{aligned} & [[2(-1+\sqrt{2})^2, 2], [2(\sqrt{2}+1)^2, 2]] \\ & [[6-4\sqrt{2}, 2], [6+4\sqrt{2}, 2]] \end{aligned}$$

♣ Cũng có thể dùng *cú pháp thứ hai* để xác định tâm vị tự của c1, c3 như sau:

> **similitude(obj2,c1,c3,[M,N]);**

Xác định tọa độ của M:

> **coordinates(M);**

$$\left[\frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right]$$

Xác định tọa độ của N:

> **coordinates(N);**

$$\left[\frac{-2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, \frac{2-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right]$$

Nhận xét: Rõ ràng khó nhận biết được M, N điểm nào là tâm vị tự trong hay ngoài khi dùng cú pháp thứ hai Nhưng Maple đã mặc định điểm thứ nhất là tâm vị tự trong, còn điểm thứ hai là tâm vị tự ngoài.

* Xác định các tâm vị tự của c1 và c2.

> **similitude(obj1,c1,c2);**

similitude: "hint: the external and internal centers of similitude are the same"

[in_similitude_of_c1_c2 , ex_similitude_of_c1_c2]

Chúng ta thấy Maple thông báo rằng 2 tâm vị tự là trùng nhau (giống nhau_same).

{Điều này dễ thấy vì bán kính hai đường tròn c1, c2 bằng nhau}

Xem chi tiết ta sẽ biết:

> **detail(obj1);**

[name of the object: in_similitude_of_c1_c2

form of the object: point2d

*coordinates of the point: [-1/2, 2], name of the object: ex_similitude_of_c1_c2 *

form of the object: point2d

coordinates of the point: [-1/2, 2]]

Qua kết quả thông báo của Maple, chúng ta thấy 2 tâm vị tự đều có tọa độ (-1/2; 2)

Bây giờ ta thử dùng cú pháp thứ hai xem Maple thông báo gì ?

```
> similitude(obj1,c1,c2,[M,N]);
similitude:  "hint: the external and internal centers of similitude
are the same"
[M,N]
```

Tọa độ của M và N là:

```
> map(coordinates,obj1);
[[0, 2], [0, 2]]
```

5.6) Hàm xác định đường thẳng (l) là tiếp tuyến với đường tròn (c) tại điểm M thuộc (c).

Cú pháp: **>tangentpc(l, M, c);**

5.7) Hàm xác định các đường thẳng (obj) là tiếp tuyến với đường tròn (c) đi qua điểm A ở ngoài (c).

Cú pháp: **>TangentLine(obj, A, c, [l1, l2]);**

Trong đó: - l1, l2 là tên của 2 đường tiếp tuyến;

5.8) Hàm kiểm tra xem hai đường tròn $c1$ và $c2$ có trục giao với nhau hay không .

Cú pháp: **>AreOrthogonal(c1, c2, 'cond');**

Trong đó: cond là điều kiện để $c1$ và $c2$ trục giao nếu phương trình (hoặc các yếu tố khác) của $c1$ hoặc $c2$ có chứa tham số. Kết quả của 'cond' được cho dưới dạng một hệ thức (đẳng thức).

5.9) Hàm xác định giao điểm của đường thẳng (l) với đường tròn c hoặc giao điểm của 2 đường tròn $c1, c2$.

Cú pháp: **>intersection(obj, l, c);**

hoặc **>intersection(obj, l, c, [M,N]);**

Trong đó: - obj là tên của tập hợp các giao điểm.
- M, N (ở cú pháp thứ 2) là tên của các giao điểm.

*Giao điểm của 2 đường tròn:

Cú pháp: **>intersection(obj, c1, c2);**

hoặc **>intersection(obj, c1, c2, [M,N]);**

6. Hình vuông.

* Hàm xác định hình vuông Sq đi qua bốn đỉnh M, N, P, Q .

Cú pháp: **>square(Sq, [M,N,P,Q]);**

* Hàm tính độ dài đường chéo hình vuông Sq .

Cú pháp: **>diagonal(Sq);**

* Hàm tính diện tích hình vuông Sq .

Cú pháp: **>area(Sq);**

6. Ba đường conic.

6.1) Đường elip.

Một số từ khóa liên quan đến các yếu tố của $\text{elip}(p)$:

***form(p)**: cho biết thể loại của $\text{elip}(p)$. Kết quả là *ellipse2d*.

***center(p)**: cho biết tâm của $\text{elip}(p)$.

***foci(p)**: cho biết các tiêu điểm của $\text{elip}(p)$.

***MajorAxis(p)**: cho biết độ dài trục lớn của $\text{elip}(p)$.

***MinorAxis(p)**: cho biết độ dài trục nhỏ của $\text{elip}(p)$.

* **detail(p)**: xem chi tiết các yếu tố của $\text{elip}(p)$.

6.1a) Elip p đi qua 5 điểm A, B, C, E, F cho trước.

Cú pháp: `>ellipse(p, [A, B, C, E, F],[name]);`

Ở chương trình phổ thông hiện nay dạng này không được đề cập.

6.1b) Elip p xác định khi biết đường chuẩn d , một tiêu điểm F và tâm sai ecc .

Cú pháp: `>ellipse(p,['directrix'=d, 'focus'=F, 'eccentricity'=ecc], [name]);`

Ví dụ:

Xét elip có một tiêu điểm $F(-4;0)$, tâm sai $e = \frac{4}{5}$ và đường chuẩn có phương

trình $(l): x = -\frac{25}{4}$.

+ Xác định elip trên trong Maple:

Đầu tiên định nghĩa đường thẳng (l) và điểm F :

`> with(geometry):`

`> line(l,x=-25/4,[x,y]),point(F,-4,0):`

Tiếp theo ta định nghĩa elip:

`>ellipse(p,['directrix'=l,'focus'=F,'eccentricity'=4/5],[x,y]);`

p

Xem chi tiết các yếu tố của $\text{elip}(p)$:

`> detail(p);`

name of the object: p

length of the major axis: 10

form of the object: ellipse2d

length of the minor axis: 6

center: [0, 0]

*equation of the ellipse: 9/25*x^2-9+y^2 = 0*

foci: [[-4, 0], [4, 0]]

Kết quả thông báo của Maple cho ta biết elip có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$, hai tiêu điểm có tọa độ $(-4;0)$, $(4;0)$; độ dài trục lớn bằng 10, trục nhỏ bằng 6. Phương

trình của elip (p) là: $\frac{9}{25}x^2 + y^2 - 9 = 0$ hay $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

+ Xem riêng phương trình của $\text{elip}(p)$:

> **Equation(p,[x,y]);**

$$\frac{9x^2}{25} - 9 + y^2 = 0$$

+Xem tọa độ các tiêu điểm:

> **foci(p),map(coordinates,foci(p));**
 $[foci_1_p, foci_2_p], [[-4, 0], [4, 0]]$

6.1c) Elip p xác định khi biết 2 tiêu điểm $[F1, F2]$ và độ dài trục lớn lma.

Cú pháp:

> **ellipse(p,['foci'=[F1, F2], 'MajorAxis'=lma], [name]);**

Ví dụ:

Xét elip(p) có 2 tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ và độ dài trục lớn bằng 12.

* Nhập các điểm và elip(p) vào Maple:

> **restart;**
 > **with(geometry):**
 > **point(F1,-3,0), point(F2,3,0):**
 > **ellipse(p,['foci'=[F1, F2], 'MajorAxis'=12],[x,y]);**
 p

+Tọa độ tâm của (p):

> **coordinates(center(p));**
 $[0, 0]$

+Phương trình của (p):

> **Equation(p);**
 $432x^2 - 15552 + 576y^2 = 0$

+ Độ dài trục nhỏ và trục lớn của (p):

> **MinorAxis(p), MajorAxis(p);**
 $6\sqrt{3}, 12$

6.1d) Elip p xác định khi biết 2 tiêu điểm $[F1, F2]$ và độ dài trục nhỏ lmi.

Cú pháp:

> **ellipse(p,['foci'=[F1, F2], 'MinorAxis'=lmi], [name]);**

Ví dụ:

Xét elip(p) có hai tiêu điểm $F_1(-5;2)$, $F_2(5;2)$, độ dài trục nhỏ bằng 9.

+ Nhập các tiêu điểm và elip(p) vào Maple:

> **restart;**
 > **with(geometry):**
 > **point(F1,-5,2), point(F2,5,2):**
 > **ellipse(p,['foci'=[F1, F2], 'MinorAxis'=9],[x,y]):**

+ Tọa độ tâm của

> `coordinates(center(p));`

$$\left[\frac{-1}{2}, 2 \right]$$

+Độ dài trục nhỏ, trục lớn của elip(p):

> `MinorAxis(p), MajorAxis(p);`

$$9, \sqrt{202}$$

+ Phương trình của elip(p):

> `Equation(p);`

$$324x^2 + 324x + 808y^2 - 3232y - 13049 = 0$$

Viết về dạng bình phương:

> `with(student, completesquare)(Equation(p), [x, y]);`

$$\left[808(y-2)^2 - 16362 + 324\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \right]$$

Nhận xét: Ở ví dụ này chúng ta đã xét một elip không thuộc chương trình toán phổ thông trung học hiện nay. Để áp dụng cho các elip ở chương trình toán phổ thông hiện nay, quý bạn đọc chỉ cần nhập các yếu tố của nó đúng với một elip có phương trình chính tắc thì sẽ có được kết quả mong muốn.

6.1e) Elip p xác định khi biết 2 tiêu điểm [F1, F2] và tổng khoảng cách dis từ một điểm bất kì trên elip p đến 2 tiêu điểm.

Cú pháp:

> `ellipse(p, ['foci'=[F1, F2], 'distance'=dis], [name]);`

6.1f) Elip p xác định khi biết 2 đỉnh [A, B] của trục lớn và 2 đỉnh [C, E] của trục nhỏ.

> `ellipse(p, [MajorAxis'=[A,B],
'MinorAxis'=[C,E]], [name]);`

Ví dụ:

Xét elip (p) có 2 đỉnh thuộc trục lớn $A_1(-6;0), A_2(6;0)$; hai đỉnh trên trục nhỏ $B_1(0;-2), B_2(0;2)$.

+ Nhập các điểm trên vào Maple và xác định elip(p):

> `restart;`

> `with(geometry):`

> `point(A1,-6,0), point(A2,6,0), point(B1,0,-2),
point(B2,0,2):`

> `ellipse(p, ['MajorAxis'=[A1, A2],
'MinorAxis'=[B1,B2]], [x,y]):`

+ Phương trình của elip(p):

> `Equation(p);`

$$64x^2 - 2304 + 576y^2 = 0$$

+Tọa độ các tiêu điểm của elip(p):

```
> map(coordinates, foci(p));
```

$$[[-4\sqrt{2}, 0], [4\sqrt{2}, 0]]$$

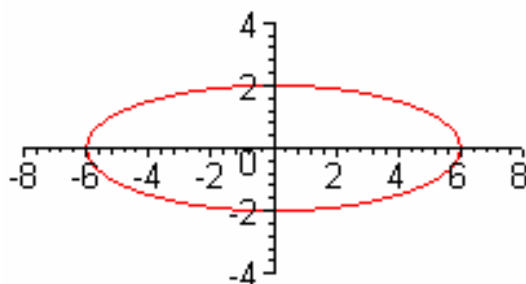
+Độ dài trục nhỏ, trục lớn của elip(p):

```
> MinorAxis(p), MajorAxis(p);
```

$$4, 12$$

+Vẽ elip(p):

```
> draw(p, view=[-8..8, -4..4]);
```



6.1g) Elip p xác định khi biết một phương trình equ của nó.

```
> ellipse(p, equ, [name]);
```

Ví dụ:

Xét elip(p) cho bởi phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

* Xác định elip(p) trong Maple:

```
> with(geometry):
```

```
> ellipse(p, x^2/25+y^2/4=1, [x,y]):
```

+ Tọa độ các tiêu điểm của elip(p):

```
> map(coordinates, foci(p));
```

$$[[-\sqrt{21}, 0], [\sqrt{21}, 0]]$$

+ Độ dài các trục nhỏ, trục lớn của elip(p):

```
> MinorAxis(p), MajorAxis(p);
```

$$4, 10$$

+Tọa độ tâm của elip(p):

```
> coordinates(center(p));
```

$$[0, 0]$$

6.2) Đường hyperbol.

6.2a) Hyperbol p đi qua 5 điểm A, B, C, E, F cho trước.

Cú pháp: `>hyperbola(p, [A, B, C, E, F], [name]);`

6.2b) Hyperbol p xác định khi biết đường chuẩn d , một tiêu điểm F và tâm sai ecc .

Cú pháp:

```
>hyperbola(p,['directrix'=d, 'focus'=F, 'eccentricity'=ecc], [name]);
```

6.2c) Hyperbol p xác định khi biết 2 tiêu điểm $[F1, F2]$ và 2 đỉnh $[A1, A2]$ (trên trục thực) của p .

Cú pháp:

```
>hyperbola(p,['foci'=[F1, F2], 'vertices'=[A1, A2] ], [name]);
```

6.2d) Hyperbol p xác định khi biết 2 tiêu điểm $[F1, F2]$ và khoảng cách disv giữa 2 đỉnh (trên trục thực) của p .

Cú pháp:

```
>hyperbola(p,['foci'=[F1,F2], 'distancev'=disv],[name]);
```

6.2e) Hyperbol p xác định khi biết khoảng cách disf giữa 2 tiêu điểm và tổng khoảng cách disv giữa 2 đỉnh(trên trục thực) của hyperbol p .

Cú pháp:

```
>hyperbola(p,['foci'=[F1, F2], 'distance'=disv], [name]);
```

6.2g) Hyperbol p xác định khi biết một phương trình equ của nó.

```
>hyperbola(p, equ,[name]);
```

6.3) Đường parabol.

6.3a) Parabol p đi qua 5 điểm A, B, C, E, F cho trước.

Cú pháp:

```
>parabola(p, [A, B, C, E, F],[name]);
```

6.3b) Parabol p xác định khi biết tiêu điểm F và đỉnh E của nó.

Cú pháp:

```
>parabola(p, ['focus'=F, 'vertex'=E],[name]);
```

6.3b) Parabol p xác định khi biết tiêu điểm F và đường chuẩn d .

Cú pháp:

```
>parabola(p, ['focus'=F, 'directrix'=d],[name]);
```

6.2g) Parabol p xác định khi biết một phương trình equ của nó.

Cú pháp:

>parabola(p, equ,[name]);

6.4 Conic tổng quát.

6.3a) Conic c đi qua 5 điểm A, B, C, E, F cho trước.

Cú pháp: **>conic(c, [A, B, C, E, F],[name]);**

6.3b) Conic c xác định khi biết đường chuẩn d , tiêu điểm F và tâm sai ecc .

Cú pháp: **>conic(c, [d, F, ecc],[name]);**

6.3c) Conic c xác định khi biết phương trình của nó.

Cú pháp: **>conic(c, equ,[name]);**

7. Các phép biến hình trong mặt phẳng.

7.1) Phép tịnh tiến theo vector \overrightarrow{AB} .

8. Hàm vẽ các đường obj1, obj2, obj3,... (curves) trong mặt phẳng.

Cú pháp:

>draw([obj1(opt1), obj2(opt2), obj3(opt3),...], opts);

Trong đó:

-obj1, obj2, obj3,... là các option tương ứng của các đường obj1, obj2, obj3,... Thường các option này là các từ khóa: **color, linestyle, numpoints, style, symbol, thickness, printtext, filled, transparency**.

Chú ý: **filled** được khai báo chỉ khi các đường là “đường khép kín” (chẳng hạn tam giác, hình vuông, đường tròn, elip,...). Điều quan trọng nhất khi dùng từ khóa này là *để ý đến thứ tự của các hình cần vẽ*. Maple quy định ‘đường thứ nhất’ sẽ nằm trên(on top) ‘đường thứ hai’. Ví dụ: Vẽ đường tròn c1 chứa đường tròn c2 thì ta phải khai báo c2 trước c1, tức câu lệnh có dạng:

draw([c2(filled2), c1(filled1)], opts);

- opts là các option còn lại tương tự trong gói lệnh **with(plottools):**, thường dùng các từ khóa **adaptive** và **sample**.